Anwendung der Keplerschen Gesetze auf Exoplaneten

Sergei Kovalenko

Die Entdeckung von Exoplaneten hat unser Verständnis von Planetensystem revolutioniert. In dieser Ausarbeitung zeigen wir anschaulich und recht elementar, wie mithilfe der Radialgeschwindigkeits- und der Transitmethode fundamentale Eigenschaften von Exoplaneten berechnet werden können und stellen Beispiele für ihre praktische Anwendung vor.

Die Radialgeschwindigkeitsmethode

Wir betrachten das Zweikörperproblem, in dem ein kugelförmiger homogener Körper der (kleineren) Masse m einen anderen kugelförmigen homogenen Körper der (größeren) Masse M umläuft. Ist S der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Körper und $\vec{r}_M(t)$ und $\vec{r}_m(t)$ die Ortsvektoren von M bzw. m zum Zeitpunkt t relativ zu S, dann gilt bekanntermaßen

$$M \cdot \vec{r}_M(t) = -m \cdot \vec{r}_m(t),$$

und insbesondere für ihre Beträge $r_M(t) := |\vec{r}_M(t)|$ und $r_m(t) := |\vec{r}_m(t)|$ die Beziehung

$$M \cdot r_M(t) = m \cdot r_m(t). \tag{1}$$

Durch Differentiation nach t ergibt sich hieraus für die Geschwindigkeiten $\vec{v}_M(t)$ und $\vec{v}_m(t)$ relativ zum gemeinsamen Schwerpunkt S die Relation

$$M \cdot \vec{v}_M(t) = -m \cdot \vec{v}_m(t),$$

die insbesondere die Beziehung

$$M \cdot v_M(t) = m \cdot v_m(t) \tag{2}$$

für die entsprechenden Geschwindigkeitsbeträge $v_M(t) = |\vec{v}_M(t)|$ und $v_m(t) = |\vec{v}_m(t)|$ induziert.

Bewegt sich der Zentralstern in etwa in der Blickebene, so lässt sich die Projektion des Geschwindigkeitsverlaufs $v_M(t)$ in Blickrichtung messen. Unter bestimmten Annahmen — die in jedem Einzelfall zu rechtfertigen sind — können daraus bestimmte Aussagen über den oder die Exoplaneten treffen, die den Zentralstern umkreisen.

Die Anwendung dieser Beziehungen demonstrieren wir am Beispiel der Exoplaneten Dimidium (51 Pegasi b) und Kepler-1b.

Der Exoplanet Dimidium (51 Pegasi b). Der Stern 51 Pegasi war der erste Stern, bei dem ein Exoplanet nachgewiesen wurde (1995). Bei 51 Pegasi wurde eine periodische Radialgeschwindigkeitsänderung von ca. 56 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gemessen ([1] und [2]). Messungen ergaben eine Periode von $T = 4{,}2308$ d, die zugleich genau der Umlaufzeit von 51 Pegasi b entspricht. Weitere Analysen ergeben für die Masse von 51 Pegasi den Wert

$$M = 1{,}09 \cdot M_\odot,$$

wobei $M_\odot$ die Masse der Sonne sei. Für die große Halbachse a von der elliptischen Umlaufbahn von Dimidium folgt dann nach dem 3. Keplerschen Gesetz

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}} \approx 7{,}882 \cdot 10^7 \text{ km} \approx 0{,}053 \text{ AU}.$$

Die mittlere Bahngeschwindigkeit $\bar{v}_m$ von Dimudium ist damit gegeben durch

$$\bar{v}_m = \frac{2\pi a}{T} \approx 135 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Anhand des Radialgeschwindigkeitsgraphen von 51 Pegasi lässt sich schließen, dass die Bahnform von Dimidium eine sehr kleine Exzentrizität haben muss, weswegen wir annehmen können, dass die Bahn von Dimidium näherungsweise ein Kreis ist. Die Bahngeschwindigkeit ist deshalb fast konstant und entspricht der mittleren Bahngeschwindigkeit $\bar{v}_m$, die wir im Folgenden einfach als v_m notieren. Entsprechend ist auch die Geschwindigkeit $v_M(t)$ von 51 Pegasi nahezu konstant, die wir einfach als v_M notieren und die den Wert $v_M \approx 56 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ besitzt.
Wir können daraus auf die Masse m von Dimidium mittels der Beziehung (2) schließen via

$$m = \frac{v_M}{v_m} \cdot M \approx 8{,}96 \cdot 10^{26} \text{ kg} \approx 0{,}47 \cdot M_J.$$

Dabei ist $M_J \approx 1{,}898 \cdot 10^{27}$ kg die Masse des Jupiters.

Der Exoplanet Kepler-1b. Radialgeschwindigkeitsmessungen ([3]) für den Exoplaneten Kepler-1b ergeben eine Amplitude K von

$$K = 181{,}3 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

die Periode beträgt genau

$$T = 2{,}4706 \text{ d}.$$

Auch hier lassen die Daten auf eine nahezu kreisförmige Umlaufbahn eines (schweren) Exoplaneten Kepler-1b schließen. Kepler-1 besitzt eine Masse M von

$$M = 1{,}049 \cdot M_\odot,$$

allerdings liefern verschiedene Quellen verschieden Massen. Diese Masse wird von einer der Messungen in ([3]) angegeben. Mit den Notationen aus dem Beispiel um 51 Pegasi b bekommen wir dann für die große Halbachse a den Wert

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}} \approx 5{,}437 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 0{,}0363 \text{ AU},$$

in guter Übereinstimmung mit den in ([3]) angegebenen Werten. Seine (fast konstante) Orbitalgeschwindigkeit v_m beträgt damit

$$v_m = \frac{2\pi a}{T} \approx 160 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Indem wir $v_M = K$ setzen, lässt sich seine Masse m somit errechnen zu

$$m = \frac{v_M}{v_m} \cdot M \approx 2{,}364 \cdot 10^{27} \text{ kg} \approx 1{,}246 \cdot M_J,$$

ebenfalls in guter Übereinstimmung mit den in ([3]) angegebenen Werten.

Die Transitmethode

Wenn ein Exoplanet an seinem Heimatstern vorbeizieht, findet in sehr regelmäßigen zeitlichen Abständen eine minimale Verdunkelung statt. Wenn wir mit $F_{\text{ohne Transit}}$ die Helligkeit des Sterns und mit $F_{\text{mit Transit}}$ die Helligkeit des Sterns während des Transits eines einzelnen Exoplaneten P bezeichnen, dann wird die **Transittiefe** ΔF definiert durch

$$\Delta F := \frac{F_{\text{ohne Transit}} - F_{\text{mit Transit}}}{F_{\text{ohne Transit}}}.$$

Ist dann r der Radius des Exoplaneten P und R der des Sterns, dann gilt offensichtlich

$$\Delta F = \frac{r^2}{R^2},$$

oder umgeschrieben

$$r = \sqrt{\Delta F} \cdot R.$$

Aus der Transittiefe und der Größe des Sterns — sofern bekannt — lässt sich somit die Größe des Exoplaneten P errechnen. Ist zudem die Masse M des Sterns bekannt, dann lässt sich die große Halbachse a der Bahn des Exoplaneten P berechnen via

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M}{4\pi^2}}.$$

Unter der recht häufig greifenden Annahme, dass die Bahn des Exoplaneten eine sehr kleine Exzentrizität besitzt und unter der Kenntnis der Radialgeschwindigkeitsamplitude K des Sterns kann ein Rückschluss auf die Masse m des Exoplaneten P gezogen werden, woraus sich seine Dichte ρ zu

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi r^3}.$$

ergibt. Die Dichte erlaubt dann wiederum Rückschlüsse auf die Beschaffenheit des Exoplaneten P (Gesteins- oder Gasplanet).

Wir demonstrieren diese Methode am Beispiel des Exoplaneten Kepler-10b.

Der Exoplanet Kepler-10b. Die Masse M und der Radius R des Sterns Kepler-10 werden (s. [5] und [6]) angegeben zu

$$M = 0{,}910 \cdot M_\odot \approx 1{,}81 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \;\; R = 1{,}065 \cdot R_\odot \approx 741.200 \text{ km},$$

wobei $M_\odot$ die Masse und $R_\odot$ der Radius der Sonne ist. Für den Exoplaneten Kepler-10b wurde mittels Transitmethode eine Transittiefe von

$$\Delta F = 0{,}000191$$

gemessen, mit einer Periode von genau

$$T = 0{,}837495 \text{ d},$$

s. [4], [5] und [6]. Hieraus ergibt sich für den Radius r von Kepler-10b die Beziehung

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\Delta F} \approx 0{,}0138,$$

und damit der Radius zu

$$r = \sqrt{\Delta F} \cdot R \approx 10.240 \text{ km}.$$

An dieser Stelle weicht der errechnete Wert für r von den Literaturwerten (von ca. 9.500 km) leicht nach oben ab. Ein möglicher Grund könnte die ungenaue oder fehlerbehaftete Mesung der Transittiefe sein. Ebenso lässt sich die große Halbachse mittels des 3. Keplerschen Gesetzes berechnen zu

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}} \approx 2{,}521 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 0{,}0169 \text{ AU},$$

in sehr guter Übereinstimmung mit den bekannten Daten. Messungen legen nahe, dass die Exzentrizität der Umlaufbahn von Kepler-10b fast bei 0 liegen muss, weswegen wir erneut von einer kleisförmigen Umlaufbahn mit konstanter Umlaufgeschwindigkeit v_m ausgehen dürfen. Diese lässt sich schnell errechnen zu

$$v_m = \frac{2\pi a}{T} \approx 219 \ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Die Amplitude K der Radialgeschwindigkeit von Kepler-10 ist nach [6] gegeben durch $K = 2{,}34 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, weswegen die weiter oben eingeführte Geschwindigkeit v_M der Gegenbewegung von Kepler-10 den konstanten Wert

$$v_M = 2{,}34 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

besitzen muss. Daraus ergibt sich für die Masse m von Kepler-10b der Wert

$$m = \frac{v_M}{v_m} \cdot M \approx 1{,}935 \cdot 10^{25} \text{ kg} \approx 3{,}24 \cdot M_E,$$

wobei M_E die Masse der Erde ist, und zusammen mit dem Radius r die Dichte ρ zu

$$\rho = \frac{m}{V} \approx 4{,}302 \ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Unter der Annahme der Literaturwerte für den Radius r ergäbe sich eine Dichte von mindestens $5{,}5 \ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. In beiden Fällen jedoch deuten die Berechnungen auf einen Gesteinsplaneten hin.

Die folgende Tabelle fasst die bisherigen Ergebnisse zusammen:

Parameter	**51 Pegasi b**	**Kepler-1b**	**Kepler-10b**
Masse des Sterns	$1{,}09 \cdot M_\odot$	$1{,}049 \cdot M_\odot$	$0{,}910 \cdot M_\odot$
Radius des Sterns	-	-	$1{,}065 \cdot R_\odot$
Umlaufzeit (T)	4,2308 d	2,4706 d	0,837495 d
Große Halbachse (a)	0,053 AU	0,0363 AU	0,0169 AU
Masse des Planeten	$0{,}47 \cdot M_J$	$1{,}246 \cdot M_J$	$3{,}24 \cdot M_E$
Radius des Planeten	-	-	10.240 km
Dichte	-	-	$4{,}302\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

Diese Beispielrechnungen zeigen, wie präzise moderne Methoden in der Astronomie angewandt werden können, um Exoplaneten zu charakterisieren, ohne sie dabei explizit (fotografisch) abzubilden. Insbesondere erlaubt die Kombination aus der Radialgeschwindigkeits- und der Transitmethode, essentielle Parameter wie Masse, Radius und Dichte zu bestimmen, die wichtige Hinweise über die Natur der Planeten liefern.

Literatur und Einzelnachweise:

[1] https://www.planetary.org/space-images/radial-velocity-graph-51-pegasi

[2] https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/overview/51%20Pegasi

[3] https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/overview/Kepler-1%20b

[4] https://chameleon.iwf.oeaw.ac.at/whats-in-an-exoplanet-transit-a-matter-of-depth/

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler-10b

[6] https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/overview/Kepler-10